Schriftliche Prüfung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 - VO Doz. Grill

2. Juli 2019

zweistündig ohne Unterlagen

1. (a) Definieren Sie: Ring, Semiring, Sigmaring, Algebra, Sigmaalgebra, Dynkin-System, monotones System.

   (b) Formulieren und beweisen Sie das monotone class theorem.

2. (a) Definieren Sie: Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, äußere Maßfunktion, von einem Maß auf einem Ring erzeugte äußere Maßfunktion.

   (b) μ und ν seien zwei Maßfunktionen auf dem Ring $\mathfrak{R}$. Zeigen Sie:

   $$(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$$

   und

   $$\mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu^*+\nu^*}.$$

3. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Treppenfunktion, Konvergenz im Maß, Konvergenz fast überall, Konvergenz fast gleichmäßig.

   (b) In welchem Sinn (fast überall gleichmäßig/fast gleichmäßig/fast überall/im Maß) konvergieren die folgenden Folgen in $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$?

      i. $f_n(x) = \sin(x)/n$,

      ii. $f_n(x) = e^{-n|x|}$,

      iii. $f_n(x) = x/n$,

      iv. $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq x \leq \sqrt{n+1} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

4. (a) Definieren Sie: Lebesgue-Stieltjtes Maßfunktion, Verteilungsfunktion.

   (b) Zeigen Sie, dass

   $$F(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$$

   eine zweidimensionale Verteilungsfunktion ist, und bestimmen Sie $\mu_F(]0,1]\times]0,1])$ und $\mu_F(\{(x,x) : 0 < x \leq 1\})$.