

Schriftliche Prüfung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 - VO Doz. Grill

2. Oktober 2019

zweistündig ohne Unterlagen

1. (a) Definieren Sie: Ring, Semiring, Sigmaring, Algebra, Sigmaalgebra, Dynkin-System, monotonen System.
- (b) Von welchem Typ sind folgende Mengensysteme über $\Omega = \mathbb{R}$?

$$\mathfrak{C}_1 = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| < \infty\},$$

$$\mathfrak{C}_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| < 5\},$$

$$\mathfrak{C}_3 = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| < \infty \text{ gerade}\},$$

$$\mathfrak{C}_4 = \{A \subseteq \mathbb{R} : \text{card}(A) \leq \aleph_0\}.$$

2. (a) Definieren Sie: Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, äußere Maßfunktion, von einem Maß auf einem Ring erzeugte äußere Maßfunktion, messbare Menge.
 - (b) Zeigen Sie, dass das System \mathfrak{M} der μ^* -messbaren Mengen eine Sigmaalgebra ist, und dass die Einschränkung von μ^* auf \mathfrak{M} ein Maß ist.
3. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Treppenfunktion, Konvergenz im Maß, Konvergenz fast überall, Konvergenz fast gleichmäßig.
 - (b) In welchem Sinn (fast überall gleichmäßig/fast gleichmäßig/fast überall/im Maß) konvergieren die folgenden Folgen in $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$?
 - i. $f_n(x) = \sin(x)/n$,
 - ii. $f_n(x) = e^{-n|x|}$,
 - iii. $f_n(x) = x/n$,
 - iv. $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq x \leq \sqrt{n+1} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
4. (a) (X_n) sei eine Folge von unabhängigen, auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Bestimmen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}.$$