Schriftliche Prüfung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 - VO Doz. Grill

28. November 2019

zweistündig ohne Unterlagen

1. Stellen Sie fest, welche der folgenden Mengenfunktionen auf $2^{\mathbb{R}}$ äußere Maße sind. Bestimmen Sie für die äußeren Maßfunktionen jeweils das System der μ^*-messbaren Mengen.

   (a) $\mu^*(A) = |A|$,

   (b)
   $$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } |A| < \infty, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

   (c)
   $$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \operatorname{card}(A) \leq \aleph_0, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

   (d)
   $$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } A = \emptyset, \\ 2 & \text{wenn } A = \mathbb{R}, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

2. (a) Definieren Sie: Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, Lebesgue-Stieltjes Maßfunktion, Regularität von oben, Regularität von unten, Regularität von Maßen.

   (b) Zeigen Sie, dass Lebesgue-Stieljes Maße regulär sind.

3. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Treppenfunktion, Konvergenz im Maß, Konvergenz fast überall, Konvergenz fast gleichmäßig.

   (b) Formulieren und beweisen Sie den Approximationssatz für reellwertige messbare Funktionen.

4. (a) Definieren Sie das Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion.

   (b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von der dominierten Konvergenz.

   (c) (X_n) sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$, (a_n) eine Folge von reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass
   $$\sum_n a_n X_n$$
   genau dann fast sicher konvergiert, wenn $\sum_n a_n^2 < \infty$.