

**Schriftliche Prüfung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2**

**10. Februar 2020 Grill**

zweistündig ohne Unterlagen

1. (a) Definieren Sie:  $p$ -fach integrierbare Funktion,  $p$ -Norm,  $\mathcal{L}_p$ -Raum,  $L_p$ -Raum.  
(b) Formulieren und beweisen Sie die Ungleichung von Minkowski.
2. (a) Definieren Sie: absolute Stetigkeit und Singularität von zwei Maßfunktionen, Radon-Nikodym-Dichte, Lebesgue-Zerlegung.  
(b) Formulieren und beweisen Sie den Zerlegungssatz von Lebesgue.
3.  $X$  und  $Y$  sind unabhängig gleichverteilt auf  $[0, 1]$ . Bestimmen Sie Dichte und Verteilungsfunktion von
  - (a)  $Q = X/Y$ .
  - (b)  $S = X + Y$ .
4. (a) Definieren Sie: schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Konvergenz in Verteilung, charakteristische Funktion.  
(b) Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz.  
(c)  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  ist eine Folge von unabhängig exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1,  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(S_{40} > 50)$ .

The distribution function of the normal distribution:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.567	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.691	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.831	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.893	.894	.896	.898	.900	.901
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.911	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.949	.951	.952	.953	.954	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.987	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999	.999