Schriftliche Prüfung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
3. März 2020 Grill
zweistündig ohne Unterlagen

1. (a) Definieren Sie: p-fach integrierbare Funktion, p-Norm, $\mathcal{L}_p$-Raum, L_p-Raum.
   (b) Formulieren und beweisen Sie die Ungleichung von Minkowski.
2. (a) Definieren Sie das Produkt von zwei sigmaendlichen Maßräumen.
   (b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Fubini für nichtnegative messbare Funktionen.
3. Gegeben ist die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ x + 2 & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ 5 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die Lebesguezerlegung von μ_F bezüglich λ und die von λ bezüglich μ_F und jeweils die Radon-Nikodym-Dichte des absolutstetigen Anteils.

4. $(X_{ni}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n)$ sei eine gleichmäßig vernachlässigbare Doppelfolge von Zufallsvariablen mit nichtnegativen ganzzahligen Werten. Zeigen Sie, dass

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni}$$

   genau dann gegen die Poissonverteilung mit Parameter λ konvergiert, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_{ni} = 1) = \lambda$$

   und

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_{ni} > 1) = 0$$

   gilt (betrachten Sie $\mathbb{P}(S_n = 0)$ und $\mathbb{P}(S_n = 1)$; dass die Bedingung auch hinreichend ist, geht wohl am einfachsten mit charakteristischen Funktionen).