4. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Die logarithmische Normalverteilung ($LN(\mu, \sigma^2)$): X sei normalverteilt mit Mittel μ und Varianz σ^2. Bestimmen Sie die Dichte von $Y = e^X$.

2. X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{wenn } x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie c, die Randverteilungen von X und Y und

$$\mathbb{P}(X > 1/3 | Y = 1/3).$$

3. $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig mit der Verteilungsfunktion $F_X, U = \max(X_1, \ldots, X_n)$ und $V = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von U und V. Bestimmen Sie auch ihre Dichten für den Spezialfall $X \sim U(0,1)$.

4. In einer Urne befinden sich je drei schwarze, weiße und graue Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, X sei die Anzahl der weißen, Y die der schwarzen Kugeln. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y und die Randverteilung von X.

5. X und Y seien unabhängig gleichverteilt auf $[0,1]$. Bestimmen Sie die Dichte von $X + Y$.

6. X sei Poisson-verteilt mit Parameter λ, Y gammaverteilt mit Parametern n und 1 ($\lambda > 0$, $n \geq 1$). Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(Y \leq \lambda) = \mathbb{P}(X \geq n).$$

7. Es sei $X \sim B(n,p)$, $Y \sim B_1(k, n-k+1)$ ($n, k > 0, 0 < p < 1$). Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(Y \leq p) = \mathbb{P}(X \geq k).$$