7. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Bestimmen Sie Näherungen für

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$$

   durch Simulation mit $N = 10000, 100000, 1000000$ Versuchen (für Eifrige: gern auch mehr, und vielleicht eine Fehlerabschätzung?).

2. Ein Weg zur Erzeugung von (näherungsweise) standardnormalverteilten Zufallszahlen: $U_1, \ldots, U_{12}$ seien unabhängig gleichverteilt auf $[0, 1]$. Dann ist $X = U_1 + \ldots + U_{12} - 6$ näherungsweise standardnormalverteilt.

3. Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens 100 Sechsen erhält, mindestens 0.9 beträgt (mit dem zentralen Grenzwertsatz sollten Sie zu einer quadratischen Gleichung für n oder $\sqrt{n}$ kommen)?

4. Die Frage nach der Anzahl der Würfe, die nötig sind, um mit Wahrscheinlichkeit 0.9 mindestens 100 Sechsen zu erhalten, kann man auch so lösen: diese Anzahl ist negativ binomialverteilt, und diese negative Binomialverteilung kann als Summe von unabhängigen geometrischen verteilten Zufallsvariablen (jeweils die Wartezeit bis zur nächsten Sechs) dargestellt werden. Wenden Sie auf diese Summe den zentralen Grenzwertsatz an und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus dem vorigen Beispiel.

5. Bestimmen Sie für eine Zufallsvariable $X \sim B(40, 1/2)$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $[X \leq 11]$, $[X \leq 14]$, $[X \leq 17]$ und $[X \leq 20]$
   (a) exakt,
   (b) mit der Normalapproximation ohne Stetigkeitskorrektur,
   (c) mit der Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur.

6. Bestimmen Sie für eine Zufallsvariable $X \sim B(48, 1/4)$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $[X \leq 5]$, $[X \leq 9]$, $[X \leq 12]$, $[X \leq 15]$ und $[X \leq 18]$
   (a) exakt,
   (b) mit der Normalapproximation ohne Stetigkeitskorrektur,
   (c) mit der Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur.

7. Wie oft muss man Würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen größer als 100 ist, mindestens 0.9 beträgt?