

8. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17
Wiederholung Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Die Ereignisse A , B und C erfüllen die Bedingungen

$$\mathbb{P}(A) = 0.7, \mathbb{P}(B) = 0.6, \mathbb{P}(C) = 0.5,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4, \mathbb{P}(A \cap C) = 0.3, \mathbb{P}(B \cap C) = 0.2,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.1.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \setminus B)$, $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$, $\mathbb{P}((A \cup B) \setminus C)$.

2. In einer Urne befinden sich eine blaue, eine grüne und eine rote Kugel. Es wird solange gezogen, bis die rote Kugel gezogen wird. Wenn die blaue Kugel gezogen wird, wird sie beiseite gelegt, wenn die grüne Kugel gezogen wird, wird sie in die Urne zurückgelegt. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der Ziehungen.
3. Pólyas Urnenschema: In einer Urne befinden sich zwei weiße und drei schwarze Kugeln. Es wird dreimal gezogen, und nach jeder Ziehung werden die gezogene Kugel und noch eine weitere der gleichen Farbe in die Urne zurückgelegt. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der weißen Kugeln unter den gezogenen, ihren Erwartungswert und ihre Varianz.
4. Fortsetzung: Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite bzw. dritte gezogene Kugel weiß ist.
5. X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}.$$

Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y und den Korrelationskoeffizienten von X und Y .

6. Wie oft muss man einen fairen Würfel werfen, damit der Mittelwert \bar{X}_n der Augenzahlen mit Wahrscheinlichkeit 0.99 um weniger als 0.1 von 3.5 abweicht?
7. Bei einem Spiel kann auf die Ausgänge $1, \dots, m$ gesetzt werden, die mit Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_m gezogen werden. Wenn Ausgang i gezogen wird, werden die Einsätze auf i m -fach zurückgezahlt, die anderen verfallen. Ein Spieler spielt nach folgender Strategie: er verteilt sein Kapital K im Verhältnis $q_1 : \dots : q_m$ (mit $\sum_i q_i = 1$) auf die möglichen Ausgänge und verwendet den Gewinn aus einer Runde als Einsatz in der nächsten.

- (a) Zeigen Sie, dass das Kapital nach n (unabhängigen) Runden

$$K_n = K_0 X_1 \dots X_n$$

ist, mit $\mathbb{P}(X_i = mq_j) = p_j$.

(b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(K_n).$$

(c) Wie sind q_1, \dots, q_m zu wählen, damit dieser Grenzwert maximal wird?