

9. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Eine faire Münze wird wiederholt geworfen, $X(t)$ sei die Binärzahl, die aus den drei Münzwürfen mit Indizes $t, t + 1, t + 2$ gebildet wird (zu der Münzwurffolge

11010111101000...

gehört

6,5,2,5,3,7,7,6,5,2,4,0,...). Überlegen Sie, dass $X(t)$ eine Markovkette bildet, und bestimmen Sie die Übergangsmatrix.

2. In einer Urne liegen N Kugeln, die weiß oder schwarz sein können. In jedem Zug wird eine der N Kugeln zufällig ausgewählt und ihre Farbe geändert (aus schwarz wird weiß und umgekehrt). Überlegen Sie, dass die Anzahl $X(t)$ von schwarzen Kugeln zum Zeitpunkt t eine Markovkette bildet, und bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix.

3. Die Übergangsmatrix einer Markovkette mit 3 Zuständen ist

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t -stufige Übergangsmatrix $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.

4. Eine Markovkette mit drei Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t -stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.

5. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t -stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.

6. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t -stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.

7. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t -stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \rightarrow \infty$.