10. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS17

1. Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal die Folge "111" erscheint (vgl. Bsp. 1 der 9. Übung). Bestimmen Sie die mittlere Anzahl von Würfen, die dazu nötig sind.

2. Rechnen Sie das vorige Beispiel für die Folge "011".

   Verifizieren Sie die folgende Regel: t sei die mittlere Zeit bis die Folge $x_1 \dots x_k$ beobachtet wird. Wir bestimmen eine Binärzahl $A = a_1 a_2 \dots a_k$ mit
   $$a_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_j = a_{j+i-1} \text{ für } j = 1, \dots, k+1-i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
   Dann ist $t = 2A$.

3. Brad und Angelina spielen folgendes Spiel: eine Münze wird so lange geworfen, bis entweder "111" oder "011" erscheint. Im ersten Fall gewinnt Brad, im zweiten Angelina. Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten und die mittlere Spieldauer (wenn Sie die Markovkette aus der letzten Übung verwenden, müssen Sie zu ihrem Ergebnis noch 3 addieren, weil es drei Würfe braucht, bis einer der Anfangszustände erreicht wird).

4. Bestimmen Sie zu Beispiel 2 der letzten Übung die stationäre Verteilung.

5. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix
   $$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie die Klassen von verbundenen Zuständen und die mittlere Absorptionszeit.

6. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix
   $$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie die Klassen von verbundenen Zuständen.

7. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie die Klassen von verbundenen Zuständen, die Absorptionswahrscheinlichkeiten und die mittlere Absorptionszeit.