13. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS 17

1. $X_1, \ldots, X_n$ ist eine Stichprobe einer Verteilung mit der Dichte
$$f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1}[0 \leq x \leq 1].$$
Bestimmen Sie den Momentenschätzer.

2. Fortsetzung: Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer.

3. Fortsetzung: Bestimmen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein approximatives Konfidenzintervall für θ.

4. Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für den Parameter λ einer Poissonverteilung und zeigen Sie, dass er effizient ist.

5. Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für den Parameter einer Exponentialverteilung mit der Dichte
$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}[x \geq 0]$$
und zeigen Sie, dass er effizient ist.

6. Bestimmen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein approximatives Konfidenzintervall für den Parameter einer Exponentialverteilung mit der Dichte
$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}[x \geq 0].$$

7. Bestimmen Sie für die folgende Stichprobe einer Normalverteilung

   0.7 1.3 1.2 1.5 1.8 0.9 1.1 1.4 1.9 1.7

   ein 95%-Konfidenzinterval für μ.

8. Bestimmen Sie zum vorigen Beispiel ein 95%-Konfidenzintervall für σ^2.

9. Testen Sie in Beispiel 7 die Nullhypothese $\mu \leq 1.0$ gegen $\mu > 1.0$.

10. Von 1000 geprüften Artikeln waren 20 defekt. Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Anteil der defekten Artikel in der Produktion.

11. Gegeben sei folgende Stichprobe

    1.5 2.1 1.3 1.7 2.2 1.1 1.9 0.9 1.4 1.6

    1.8 1.7 2.3 1.8 1.6 2.0 1.7 2.1 1.8 1.7

    einer Normalverteilung. Testen Sie $H_0 : \mu = 1.5$ gegen die zweiseitige Alternative.

12. Testen Sie im vorigen Beispiel $H_0 : \sigma^2 \leq 0.1$ gegen $H_1 : \sigma^2 > 0.1$.

13. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für den Parameter λ einer Exponentialverteilung mit der Dichte
$$\lambda e^{-\lambda x}[x \geq 0].$$
Bestimmen Sie seinen Erwartungswert und modifizieren Sie ihn so, dass er erwartungstreu wird.

14. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für den Parameter θ einer Normalverteilung mit $\mu = \sigma^2 = \theta$.

15. Für eine Stichprobe aus einer Normalverteilung ist $n = 100$, $\bar{X}_n = 20.5$, $S_n^2 = 9$. Testen Sie $H_0 : \mu = 20$ gegen $H_1 : \mu > 20$.

16. Testen Sie im vorigen Beispiel gegen die zweiseitige Alternative.

17. Bei einer Umfrage werden 100 Personen befragt, 29 geben eine positive Antwort. Testen Sie $H_0 : p = 0.2$ gegen $H_1 : p > 0.2$.

18. Wie groß ist im vorigen Beispiel die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art, wenn $p = 0.25$ bzw. $p = 0.35$ ist?

19. Testen Sie in Beispiel 15 die Hypothese $\sigma^2 = 12$ gegen die zweiseitige Alternative.

20. Bestimmen Sie im Beispiel aus der Vorlesung ($n = 50, \bar{X}_n = 490, S_n^2 = 800$) ein 95%-Konfidenzintervall für μ.

21. Bestimmen Sie im Beispiel aus der Vorlesung ($n = 50, \bar{X}_n = 490, S_n^2 = 800$) ein 95%-Konfidenzintervall für σ^2.