**13. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse WS 17**

1. $X_1, \dots, X_n$ ist eine Stichprobe einer Verteilung mit der Dichte

$$f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}[0 \leq x \leq 1].$$

   Bestimmen Sie den Momentenschätzer.

   Wir berechnen zuerst den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

   Den Momentenschätzer für $\theta$ erhalten wir, indem wir den Erwartungswert durch das Stichprobenmittel ersetzen und nach $\theta$ auflösen, also

$$\bar{X}_n = \frac{\hat{\theta}_n}{\hat{\theta}_n + 1},$$

   und

$$\hat{\theta}_n = \frac{\bar{X}_n}{1 - \bar{X}_n}.$$

2. Fortsetzung: Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer.

   Die Likelihoodfunktion ist

$$L(X_1, \dots, X_n; \theta) = \theta^n (\prod_{i=1}^n X_i)^{\theta-1}.$$

   Um diese zu maximieren, logarithmieren wir erst, leiten nach $\theta$ ab und setzen die Ableitung 0:

$$\log L = n \log(\theta) + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log(X_i),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log(X_i) = 0,$$

   also

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(X_i)}.$$

3. Fortsetzung: Bestimmen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein approximatives Konfidenzintervall für $\theta$.

   Das ist nicht so einfach, wie es beim ersten Hinsehen ausgesehen hat. Vergessen Sie's.

4. Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für den Parameter $\lambda$ einer Poissonverteilung und zeigen Sie, dass er effizient ist.

   Die Poissonverteilung hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion

   $$p(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

   Das gibt die Likelihoodfunktion

   $$L(X_1, \ldots, X_n; \lambda) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n X_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n X_i!},$$

   $$\log L = \log(\lambda) \sum_{i=1}^n X_i - n\lambda - \sum_{i=1}^n \log(X_i!),$$

   $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n X_i - n,$$

   $$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n X_i.$$

   Zur Bestimmung des ML-Schätzers setzen wir die erste Ableitung gleich 0 und erhalten

   $$\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n.$$

   Wir wollen zeigen, dass dieser Schätzer effizient ist. Dazu ist zu zeigen, dass er erwartungstreu ist und die kleinstmögliche Varianz hat. Also bestimmen wir Erwartung und Varianz von $\hat{\lambda}_n$:

   $$\mathbb{E}(\hat{\lambda}_n) = \lambda, \mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = \frac{\lambda}{n}.$$

   $\hat{\lambda}_n$ ist also erwartungstreu. Um zu zeigen, dass die Varianz optimal ist, vergleichen wir sie mit der Cramér-Rao Schranke:

   $$I_n(\lambda) = -\mathbb{E}(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}) = \mathbb{E}(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\lambda^2}) = \frac{n\lambda}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda},$$

   und die Cramér-Rao Schranke ist

   $$\frac{1}{I_n} = \frac{\lambda}{n}.$$

   Unser Schätzer hat also eine Varianz, die mit der Cramér-Rao Schranke übereinstimmt und ist daher effizient.

5. Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für den Parameter einer Exponentialverteilung mit der Dichte

   $$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} [x \geq 0]$$

und zeigen Sie, dass er effizient ist.

Das funktioniert wie beim vorigen Beispiel, es ergibt sich

$$\hat{\theta}_n = \bar{X}_n,$$

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \theta, \mathbb{V}(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{n},$$

$\hat{\theta}_n$ ist also erwartungstreu, und, weil die Varianz mit der Cramér-Rao Schranke übereinstimmt, auch effizient.

6. Bestimmen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein approximatives Konfidenzintervall für den Parameter einer Exponentialverteilung mit der Dichte
$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}[x \geq 0].$$
Wir nehmen als Ausgangspunkt den Schätzer aus dem vorigen Beispiel, der nach dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise normalverteilt ist. Den Parameter $\theta$ in der Varianz ersetzen wir durch den Schätzer $\hat{\theta}_n$ und erhalten für die Grenzen des Konfidenzintervalls
$$\bar{X}_n \pm \frac{z_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \bar{X}_n.$$

7. Bestimmen Sie für die folgende Stichprobe einer Normalverteilung

   0.7 1.3 1.2 1.5 1.8 0.9 1.1 1.4 1.9 1.7

   ein 95%-Konfidenzinterval für $\mu$.

   Wir berechnen Stichprobenmittel und Stichprobenvarianz:
$$\bar{X}_n = 1.35, S_n^2 = 0.1517.$$
Das Konfidenzintervall ist
$$1.35 \mp 2.262\sqrt{\frac{0.1517}{10}}] = [1.071, 1.629].$$

8. Bestimmen Sie zum vorigen Beispiel ein 95%-Konfidenzintervall für $\sigma^2$.
$$[\frac{9 \cdot 0.1517}{19.02}, \frac{9 \cdot 0.1517}{2.70}] = [0.072, 0.506].$$

9. Testen Sie in Beispiel 7 die Nullhypothese $\mu \leq 1.0$ gegen $\mu > 1.0$.
$$T = \frac{1.35 - 1.0}{\sqrt{0.1517/10}} = 2.8417 > t_{9;0.95} = 1.833$$
Die Nullhypothese wird verworfen.

10. Von 1000 geprüften Artikeln waren 20 defekt. Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Anteil der defekten Artikel in der Produktion.

$$\hat{p} = \frac{20}{100} = 0.2,$$

Konfidenzintervall:

$$[0.2 \mp 1.96\sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{100}}] = [0.122, 0.278].$$

11. Gegeben sei folgende Stichprobe

1.5 2.1 1.3 1.7 2.2 1.1 1.9 0.9 1.4 1.6

1.8 1.7 2.3 1.8 1.6 2.0 1.7 2.1 1.8 1.7

einer Normalverteilung. Testen Sie $H_0 : \mu = 1.5$ gegen die zweiseitige Alternative.

$$\bar{X}_n = 1.71, S_n^2 = 0.1262105, n = 20,$$

$$T = \frac{|1.71 - 1.5|}{\sqrt{0.1262105/20}} = 2.6435 > 2.093 = t_{19,0.975},$$

und die Nullhypothese wird verworfen.

12. Testen Sie im vorigen Beispiel $H_0 : \sigma^2 \leq 0.1$ gegen $H_1 : \sigma^2 > 0.1$.

$$T = \frac{19 \cdot 0.1262105}{0.1} = 23.98 < 30.14353 = \chi^2_{19;0.95},$$

und die Nullhypothese wird angenommen.

13. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für den Parameter $\lambda$ einer Exponentialverteilung mit der Dichte

$$\lambda e^{-\lambda x}[x \geq 0].$$

Bestimmen Sie seinen Erwartungswert und modifizieren Sie ihn so, dass er erwartungstreu wird.

Der Maximum Likelihood Schätzer ist

$$\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{n}{S_n},$$

mit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

$S_n$ hat eine Gammaverteilung $\Gamma(n, \lambda)$. Damit ergibt sich (für $n > 1$)

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}_n) = \mathbb{E}(\frac{n}{S_n}) = n \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{x^{n-1}\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx = \frac{n\lambda}{n-1} \int_0^\infty \frac{x^{n-2}\lambda^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\lambda x} dx = \frac{n\lambda}{n-1}.$$

Wir erhalten als erwrtungstreuen Schätzer

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{n-1}{n}\hat{\lambda}_n = \frac{n-1}{S_n}.$$

14. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für den Parameter $\theta$ einer Normalverteilung mit $\mu = \sigma^2 = \theta$.

    Die Dichte dieser Verteilung ist

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta}}.$$

    Damit ist

$$\log L(X_1, \ldots, X_n; \theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\theta) - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2 =$$

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\theta) - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}\theta.$$

    Ableiten und Nullsetzen gibt die Gleichung

$$\theta^2 + \theta - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0,$$

    und schließlich

$$\hat{\theta}_n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

15. Für eine Stichprobe aus einer Normalverteilung ist $n = 100$, $\bar{X}_n = 20.5$, $S_n^2 = 9$. Testen Sie $H_0 : \mu = 20$ gegen $H_1 : \mu > 20$.

$$T = \frac{20.5 - 20}{\sqrt{9/100}} = 1.667 > t_{99;0.95} = 1.660$$

    Die Nullhypothese wird (knapp) verworfen.

16. Testen Sie im vorigen Beispiel gegen die zweiseitige Alternative.

    Der Wert der Teststatistik bleibt gleich, jetzt ist aber der kritische Wert $t_{99;0.975} = 1.984$, und die Nullhypothese wird angenommen (und wir haben die etwas paradoxe Situation, dass wir "beweisen" können, dass das Mittel größer als 20 ist, aber nicht, dass es von 20 verschieden ist).

17. Bei einer Umfrage werden 100 Personen befragt, 29 geben eine positive Antwort. Testen Sie $H_0 : p = 0.2$ gegen $H_1 : p > 0.2$.

    Die Teststatistik ist

$$T = \frac{0.29 - 0.2}{\sqrt{0.2 \cdot 0.8/100}} = 2.25 > 1.645 = z_{0.95},$$

    also wird $H_0$ verworfen.

18. Wie groß ist im vorigen Beispiel die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art, wenn $p = 0.25$ bzw. $p = 0.35$ ist?

    Wir arbeiten wieder mit der Normalapproximation. Zuerst formulieren wir den Test um: $H_0$ wird verworfen, wenn $\hat{p}_n > 0.266$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art ist dann $\mathbb{P}(\hat{p}_n \leq 0.266)$. Das ist (näherungsweise) für $p = 0.25$

    $$\Phi(\frac{0.266 - 0.25}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75/100}}) = 0.644,$$

    und für $p = 0.35$

    $$\Phi(\frac{0.266 - 0.35}{\sqrt{0.35 \cdot 0.65/100}}) = 0.039.$$

    (In diesem Beispiel und dem vorigen verstecken sich einige Ungenauigkeiten. Es wäre besser, mit der exakten Binomialverteilung für $Y = n\hat{p}_n$, die Anzahl der Befürworter, zu arbeiten. Das ist aber für Prüfungen nicht ganz praktikabel)

19. Testen Sie in Beispiel 15 die Hypothese $\sigma^2 = 12$ gegen die zweiseitige Alternative.

    Die Teststatistik ist

    $$T = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} = \frac{99 \cdot 9}{12} = 74.25,$$

    die kritischen Werte sind $\chi^2_{99,0.025} = 73.361$ und $\chi^2_{99,0.975} = 128.422$. Der Wert aus der Stichprobe liegt dazwischen, also wird die Nullhypothese nicht verworfen.

20. Bestimmen Sie im Beispiel aus der Vorlesung ($n = 50, \bar{X}_n = 490, S_n^2 = 800$) ein 95%-Konfidenzintervall für $\mu$.

    $$[490 \mp 2.01\sqrt{\frac{800}{50}}] = [481.96, 498.04].$$

21. Bestimmen Sie im Beispiel aus der Vorlesung ($n = 50, \bar{X}_n = 490, S_n^2 = 800$) ein 95%-Konfidenzintervall für $\sigma^2$.

    $$[\frac{49 \cdot 800}{70.22}, \frac{49 \cdot 800}{31.55}] = [558, 1242].$$