Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse für Informatik
Beispielsammlung

Karl Grill
Institu für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
TU Wien

27. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der Augenzahlen mindestens 100 beträgt, nicht kleiner ist als 0.9?

2. Die Ereignisse A, B und C erfüllen

$$\mathbb{P}(A) = 0.7, \mathbb{P}(B) = 0.6, \mathbb{P}(C) = 0.5,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4, \mathbb{P}(A \cap C) = 0.3, (B \cap C) = 0.2,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.1.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ und $\mathbb{P}(A \cup B | A \cup C)$.

3. Ein Würfel wird dreimal geworfen. X sei das Minimum der drei Augenzahlen, Y das Maximum. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y, die Randverteilungen und Erwartungswerte.

4. X und Y haben eine gemeinsame Verteilung mit der Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{für } 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die Randdichte von X, die bedingte Dichte von Y unter $X = x$, Erwartungswert und Varianz von X und die Kovarianz von X und Y.

5. X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f(x,y) = cxy[0 \le x \le y \le 1].$$

   Bestimmen Sie c, die Randdichten von X und Y und die Kovarianz von X und Y.

6. X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f(x,y) = c(x+y)[0 \le x \le y \le 1].$$

   Bestimmen Sie c, die Randdichten von X und Y und die Kovarianz von X und Y.

7. Ein Würfel wird 600 mal geworfen.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Sechsen zwischen 91 und 112 (inklusive) liegt? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit und ohne Stetigkeitskorrektur.

8. Ein Würfel wird zweimal geworfen, X sei das Minimum der beiden Augenzahlen, Y das Maximum. Bestimmen Sie die Erwartungswert und Varianz von X und Y sowie ihre Kovarianz.

9. Ein Würfel wird 600 mal geworfen.

   Bestimmen Sie a so, dass Die Summe der Augenzahlen mit Wahrscheinlichkeit 0.9 nicht größer als a ist.

10. Ein Würfel wird dreimal geworfen, $X_1 \le X_2 \le X_3$ seien die der Größe nach geordneten Augnzahlen. Bestimmen Sie die Verteilung von X_2, ihren Erwartungswert und ihre Varianz.

11. X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f(x,y) = cxy[0 \le x \le y \le 1].$$

   Bestimmen Sie c, die Randdichten von X und Y und die Kovarianz von X und Y.

12. Zwei Spieler A und B spielen folgendes Spiel: beginnend mit A wird abwechselnd gewürfelt, bis ein Spieler gewinnt. A gewinnt, wenn er eine 3 oder 6 würfelt, B gewinnt, wenn er eine gerade Zahl würfelt.

(a) Ist dieses Spiel fair?

(b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass B gewinnt, wenn A das erste Spiel verliert.

13. In einem Hut liegen 1 Zettel mit der Zahl 1, 2 mit der Zahl 2,..., 10 mit der Zahl 10. Es wird 100 mal mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gezogenen Zahlen kleiner als 750 ist.

14. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Wir setzen

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{wenn der erste Würfel "1" zeigt,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{wenn der zweite Würfel "1" zeigt,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 & \text{wenn beide Würfel die gleiche Zahl zeigen,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) X_1, X_2 und X_3 sind paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig.

(b) Für alle $i, j = 0, 1$ gilt

$$\mathbb{P}(X_2 = j | X_1 = i) = \mathbb{P}(X_3 = j | X_2 = i).$$

(c) Die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_2 = j | X_1 = i) = \mathbb{P}(X_3 = j | X_2 = i)$$

und

$$p_{ij}(2) = \mathbb{P}(X_3 = j | X_1 = i)$$

erfüllen die Chapman-Kolmogorov Gleichung, aber:

(d) (X_1, X_2, X_3) ist keine Markovkette.

15. X und Y sind unabhängig mit $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{V}(X) = 2$, $\mathbb{E}(Y) = 3$ und $\mathbb{V}(Y) = 4$. Bestimmen Sie $\mathbb{V}(X + Y)$ und $\mathbb{V}(XY)$.

16. X und Y sind unabhängig gammaverteilt: $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

17. (Zum heutigen Welttierschutztag) Ein begeisterter Tierschützer sieht täglich im Fernsehen vier Werbespots, die zum Schutz bedrohter Tierarten auffordern. Jedesmal spendet er (unabhängig von allen anderen Spenden) mit Wahrscheinlichkeit 0.6 5 Euro, mit Wahrscheinlichkeit 0.3 10 Euro und mit Wahrscheinlicheit 0.1 20 Euro. Wieviel Geld muss er am Anfang des Jahres beiseite legen, damit seine Spenden während des Jahres (365 Tage) damit mit Wahrscheinlichkeit 0.9 abgedeckt sind (verwenden Sie eine geeignete Approximation)?

18. (Zum heutigen Welttierschutztag) Ein Tierschützer möchte in die Arktis fahren, um kuschelige Seehundbabies zu retten. Die Wahrscheinlichkeit, dass er überhaupt dorthin kommt, beträgt 0.4. Ist er einmal dort, kann er mit (bedingter) Wahrscheinlichkeit 0.3 tatsächlich Seehundbabies retten. Wenn ihm das gelingt, kehrt er danach mit Wahrscheinlichkeit 0.6 heil zurück, sonst mit Wahrscheinlichkeit 0.8. Sie treffen ihn nach seiner Rückkehr. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass er Seehundbabies gerettet hat?

19. (Resolute Minderheit) Bei einer Umfrage sind 1000000 Personen wahlberechtigt. Davon sind 2800 unbedingt dafür, die restlichen Personen sind indifferent und entscheiden bei der Abstimmung mit Wahrscheinlichkeit 1/2 dafür, mit Wahrscheinlichkeit 1/2 dagegen. Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit, dass die Entscheidung negativ ausfällt.

20. X und Y haben eine gemeinsame Normalverteilung mit der Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}.$$

Bestimmen Sie die Randdichte von X und die bedingte Dichte von Y unter $X = x$.

21. Ein Würfel wird einmal geworfen, X sei die Augenzahl. Anschließend werden X faire Münzen geworfen. Y sei die Anzahl der "Köpfe", die dabei erzielt werden. Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y und die Varianz von Y.

22. X und Y sind unabhängig und identisch verteilt mit der Dichte

$$f_X(x) = f_Y(x) = 2x[0 \leq x \leq 1].$$

Bestimmen Sie Dichte und Verteilungsfunktion von $X + Y$.

23. Im Märchenland leben (unter anderen) Wölfe, Schafe und Krautköpfe (Sie kennen möglicherweise das Rätsel, in dem ein Fährmann drei dieser Fabelwesen über den Fluss setzen soll — eines von jeder Sorte, aber außer ihm passt nur eines ins Boot, und wenn er nicht dabei ist, frisst der Wolf das Schaf bzw. das Schaf den Krautkopf; darum geht es aber hier nicht). Nehmen Sie an, dass es doppelt so viele Schafe wie Wölfe gibt und doppelt so viele Krautköpfe wie Schafe. Nehmen Sie weiter an, dass sich diese Fabelwesen auch gerne verkleiden, und zwar jedes mit Wahrscheinlichkeit 1/4 als es selbst (also Schaf als Schaf etc.), mit Wahrscheinlichkeit 1/2 als die seltenere der beiden anderen Möglichkeiten (also Schaf und Krautkopf als Wolf, Wolf als Schaf). Ein zufällig gewähltes Wesen wird interviewt und sagt dabei, dass es kein Schaf im Wolfspelz ist. Sie dürfen annehmen, dass diese Aussage der Wahrheit entspricht.

    (a) Bestimmen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Krautkopf im Wolfspelz handelt.

(b) Dieselbe Frage, aber nehmen Sie an, dass das Interview im Fernsehen gezeigt wird und der Wolfspelz deutlich zu sehen ist.

24. Bei einem Quiz gibt es die fünf Gewinnstufen 500, 1000, 2000, 4000, 8000 Euro. Eine Kandidatin hört auf jeder Stufe, die sie erreicht hat, mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ auf (und erhält den jeweiligen Gewinn — nehmen Sie an, dass sie die erste Gewinnstufe auf jeden Fall ereicht), mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ gibt sie die richtige Antwort und steigt damit in die nächste Stufe auf, mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ gibt sie eine falsche Antwort und verliert alles. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie 8000 Euro gewinnt.

25. X und Y haben eine gemeinsame Verteilung mit der Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{für } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y.

26. X und Y haben eine gemeinsame Verteilung mit der Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{für } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y.

27. Ein Würfel wird 600 mal geworfen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Sechsen zwischen 91 und 112 (inklusive) liegt? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit und ohne Stetigkeitskorrektur.

28. Ein fairer Würfel wird 100 mal geworfen. Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Sechsen mindestens 21 ist.

29. X und Y haben die gemeinsame Verteilung

30. Von einer Krankheit sind 2% der Bevölkerung betroffen. Ein Test für diese Krankheit liefert bei einer gesunden Person mit Wahrscheinlichkeit 0.01 ein positives Ergebnis, bei einer erkrankten Person mit Wahrscheinlichkeit 0.995. Eine zufällig gewählte Person wird getestet. Bestimmen Sie

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person positiv getestet wird.

(b) Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich krank ist, wenn das Testergebnis positiv ist.

(c) Wie oft muss ein fairer Würfel geworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen mehr als 150 beträgt, mindestens 90% ist?

(d) Eine Zahl zwischen 13 und 31 (inklusive) wird zufällig (gleichverteilt) gezogen. X sei die erste Ziffer, Y sei die zweite Ziffer. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y und ihre Kovarianz.

(e) Eine faire Münze wird 1000000 mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der "Köpfe" um mehr als 1000 von ihrem Erwartungswert abweicht.

2 Markovketten

1. Die Übergangsmatrix einer Markovkette mit drei Zuständen ist
$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die n-stufigen Übergangswahrscheinlichkeiten und ihren Grenzwert für $n \to \infty$.

2. Zwei Spieler A und B (mit Anfangskapital a und b) spielen folgendes Spiel: eine Münze wird geworfen, erscheint Kopf, erhält A eine Einheit von B, erscheint Zahl, erhält B eine Einheit von A. Das wird so lange wiederholt, bis ein Spieler kein Kapital mehr hat (dann gewinnt der andere). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, und die mittlere Dauer des Spiels.

3. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die Klassen von Zuständen, die Absorptionswahrscheinlichkeiten und die mittleren Absorptionszeiten.

4. Die Übergangsmatrix einer Markovkette mit vier Zuständen ist
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die Klassen, die Absorptionswahrscheinlichkeiten und die mittleren Absorptionszeiten.

5. Die Übergangsmatrix einer Markovkette mit vier Zuständen ist
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen, die mittleren Absorptionszeiten und die Wahrscheinlichkeiten der Absorption in 1.

6. Die Übergangsmatrix einer Markovkette mit vier Zuständen ist

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die n-stufigen Übergangswahrscheinlichkeiten und ihren Grenzwert für $n \to \infty$

7. Die Übergangsmatrix einer Markovkette mit drei Zuständen hat die Form

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

   Bestimen Sie die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

8. Zwei Spieler A und B spielen folgendes Spiel: beginnend mit A wird abwechselnd gewürfelt, bis ein Spieler gewinnt. A gewinnt, wenn er eine 3 oder 6 würfelt, B gewinnt, wenn er eine gerade Zahl würfelt.

   (a) Ist dieses Spiel fair?

   (b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass B gewinnt, wenn A das erste Spiel verliert.

9. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Wir setzen

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{wenn der erste Würfel "1" zeigt,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{wenn der zweite Würfel "1" zeigt,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 & \text{wenn beide Würfel die gleiche Zahl zeigen,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zeigen Sie:

   (a) X_1, X_2 und X_3 sind paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig.

   (b) Für alle $i, j = 0, 1$ gilt

$$\mathbb{P}(X_2 = j | X_1 = i) = \mathbb{P}(X_3 = j | X_2 = i).$$

(c) Die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_2 = j|X_1 = i) = \mathbb{P}(X_3 = j|X_2 = i)$$

und

$$p_{ij}(2) = \mathbb{P}(X_3 = j|X_1 = i)$$

erfüllen die Chapman-Kolmogorov Gleichung, aber:

(d) (X_1, X_2, X_3) ist keine Markovkette.

10. Eine Markovkette mit drei Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

11. Der infinitesimale Erzeuger einer Markovkette mit drei Zuständen ist

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

12. Zwei Spieler A und B treten im Armdrücken gegeneinander an. Anfangs hat jeder 3 Euro Kapital, nach jeder Runde gibt der Verlierer dem Gewinner einen Euro. Das Spiel ist zu Ende, wenn einer der Spieler kein Kapital mehr hat. Nehmen Sie an, dass Spieler A eine einzelne Runde mit Wahrscheinlichkeit 0.6 gewinnt, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel gewinnt, und die mittlere Spieldauer.

3 Statistik

1. $(X_1, \ldots, X_n)$ sei eine Stichprobe einer Poissonverteilung mit

$$p_\lambda(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ und zeigen Sie, dass er effizient ist.

2. Bestimmen Sie für die folgende Stichprobe einer Normalverteilung

1.6 2.3 1.8 2.5 3.0 1.4 1.9 2.2 2.1 2.0

95%-Konfidenzintervalle für μ und σ^2.

3. $(X_1, \ldots, X_n)$ sei eine Stichprobe einer Exponentialverteilung mit

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} (x \geq 0).$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ und zeigen Sie, dass er effizient ist.

4. $X_1, \ldots X_n$ ist eine Stichprobe einer Normalverteilung mit bekannter Varianz σ^2. Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für μ und zeigen Sie, dass er effizient ist.

5. $(X_1, \ldots, X_n)$ ist eine Stichprobe einer Verteilung mit der Dichte

$$f(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1} [0 < x < 1], \theta > 0.$$

Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer und den Momentenschätzer für θ.

6. $X_1, \ldots, X_n$ st eine Stichprobe aus einer Normalverteilung mit $\mu = \sigma^2 = \theta$. Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer und den Momentenschätzer für θ.

7. $X_1, \ldots, X_n$ st eine Stichprobe aus einer Normalverteilung mit $\mu = \sigma = \theta$. Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer und den Momentenschätzer für θ.

8. Bestimmen Sie für die folgende Stichprobe eine Normalverteilung

   0.78 3.26 3.14 1.42 1.85 1.12 2.99 4.11 2.01 0.39

   0.22 2.11 2.35 2.68 1.53 1.33 0.67 0.95 1.96 0.20

   95%-Konfidenzintervalle für μ und σ^2.

4 Informationstheorie

1. In einer Urne befinden sich je zwei schwarze, weiße und rote Kugeln. Es wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen. X sei die Anzahl der weißen Kugeln, Y die Anzahl der schwarzen. Bestimmen Sie $H(X, Y)$, $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $I(X, Y)$.

2. Bestimmen Sie für $m = 1, 2, 3, 4$ explizite Ausdrücke für $H^*(p_1, \ldots, p_m)$ (Nehmen Sie an, dass $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_m$ gilt).

3. Bestimmen Sie für die Verteilung $P = (0.10, 0.30, 0.15, 0.10, 0.20, 0.15)$ den Huffman-, Shannon- und Fano-Code, die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie.

4. Bestimmen Sie für die Verteilung $P = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$ den Huffman-Code, den Shannon-Code, die Entropie und die mittlere Unbestimmtheit.

5. Bestimmen Sie die Entropie, die mittlere Unbestimmtheit und den Shannon-Code für die Binomialverteilung $B(4, 0.3)$.

6. Ein Würfel wird zweimal geworfen, X sei das Minimum der beiden Augenzahlen, Y das Maximum. Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y und $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X|Y)$, $I(X,Y)$.

7. Bestimmen Sie zu der Verteilung

$$P = (0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.17, 0.23)$$

   Den Huffman-Code, den Shannon-Code und den Fano-Code, die mittleren Codewortlängen dieser Codes und die Entropie.

8. Zeigen Sie: wenn X und Y unabhängig sind, dann gilt für die Entropien

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y).$$

9. Bestimmen Sie für die Verteilung $P = (1/55, 4/55, 9/55, 16/55, 25/55)$ den Huffmann-, Shannon- und Fano-Code.

10. Bestimmen Sie für die Verteilung $P = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.3, 0.3)$ den kanonischen Huffmann-, den Shannon- und den Fano-Code. Berechnen Sie auch mittlere Unbestimmtheit und Entropie. 5. Februar 2018

    zweistündig mit Unterlagen

    (a) Ein Würfel wird einmal geworfen, X sei die Augenzahl. Anschließend werden X faire Münzen geworfen. Y sei die Anzahl der "Köpfe", die dabei erzielt werden. Bestimmen Sie $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $I(X,Y)$.

    (b) Bestimmen Sie für die Verteilung $P = (0.2, 0.1, 0.3, 0.1, 0.2)$ den generischen Huffmancode, den Shannon- und den Fanocode, mittlere Unbestimmtheit und Entropie.

11. Bestimmen Sie für die Verteilung

$$P = (0.1, 0.1, 0.15, 0.15, 0.2, 0.3)$$

    den Huffman-, Shannon- und Fano-Code sowie die Ebntropie und die mittlere Unbestimmtheit.

12. X und Y haben die gemeinsame Verteilung

	Y			
X	1	2	3	4
1	1/4	0	1/8	1/8
2	0	1/8	1/8	0
3	0	1/16	0	1/16
4	0	1/16	0	1/16

    Bestimmen Sie $H(X), H(Y), H(X,Y), H(X|Y), H(Y|X), I(X,Y)$.

13. Eine Zahl zwischen 13 und 31 (inklusive) wird zufällig (gleichverteilt) gezogen. X sei die erste Ziffer, Y sei die zweite Ziffer. Bestimmen Sie $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$, $I(X,Y)$.

14. Gegeben ist die Verteilung $P = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.6)$. Bestimmen Sie Huffman-, Shannon- und Fano-Code.

15. Bestimmen Sie Huffman-, Shannon- und Fano-Code für die Verteilung

$$P = (0.12, 0.13, 0.17, 0.23, 0.35).$$